Orbites et coniques : Constructions à la ficelle

Yves A. Delhaye

10 mai 2015 15 :21

Résumé

Le lien entre les orbites des astres dans le système solaire et les coniques est établi.

La définition des coniques comme lieu de points est exposée.

Des techniques de construction des trois différentes coniques sont décrites et expliquées.

Un survol/rappel de la théorie des coniques permet de faire le lien entre les équations et les constructions géométriques.

Introduction

Dans le système solaire, les orbites des planètes sont des ellipses. Les trajectoires d'autres astres (comètes, météores, ...) peuvent être des ellipses, des paraboles ou des hyperboles.

La mécanique de Newton et en particulier sa loi de la gravitation universelle permettent d'expliquer pourquoi il en est ainsi.

Ces courbes sont des coniques.

Si la théorie peut être rebutante pour certains, elle est surtout trop lourde à exposer à de jeunes enfants. Pouvoir proposer une activité de "dessin-bricolage" sur le sujet est une manière ludique de leur faire "toucher" la réalité concrète du sujet.

Nous allons, après un très rapide survol de la théorie des coniques, voir des techniques qui permettent de tracer les trois grandes familles de coniques avec un matériel basique : du papier, un crayon, deux punaises, un anneau, une latte, une équerre et (d'où le titre) une ficelle.

1 Les orbites des planètes et les coniques

Introduction

Ici, nous allons rapidement expliquer le pourquoi de la démarche suivie dans le reste du texte.

A Première loi de Kepler

La première loi de Kepler dit que les orbites des planètes sont des ellipses et que le Soleil occupe un des foyers de chacune de ces ellipses.

Les orbites des comètes récurrentes (comme la comète de Halley) sont aussi des ellipses.

Les objets qui ne font que visiter notre système solaire auront, eux, une orbite parabolique ou hyperbolique.

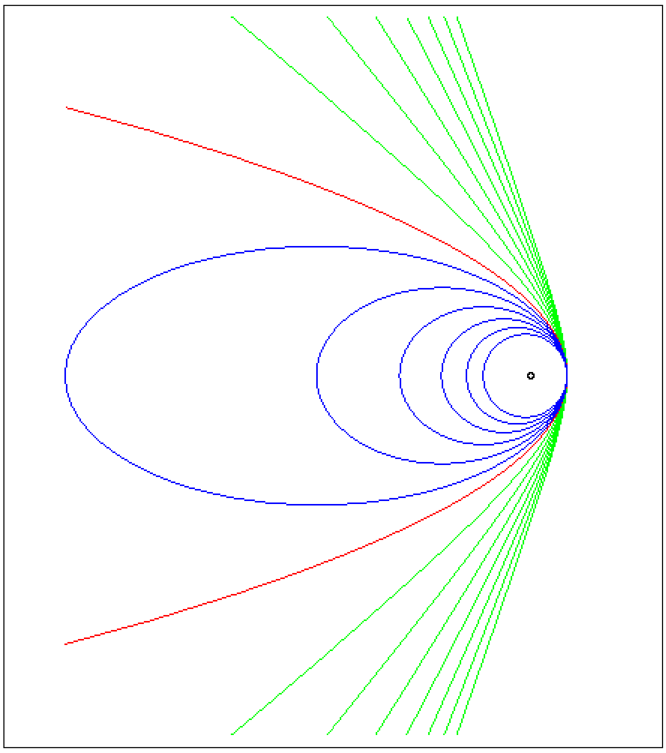

FIGURE 1 – En bleu : des ellipses ; en rouge : une parabole ; en vert : des hyperboles
Source : Le site de "mathcurve"

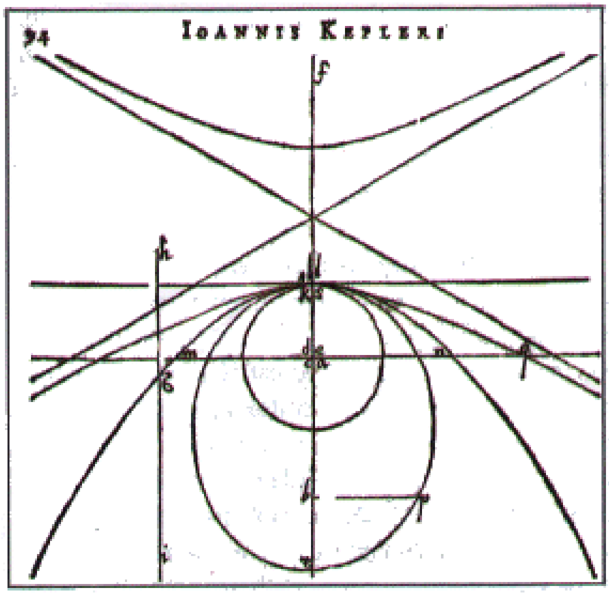

FIGURE 2 – La même figure par Kepler!
Source : Le site de "mathcurve"

B Les coniques

Ces trajectoires (ellipses, paraboles, hyperboles) sont des coniques. Les coniques sont des objets mathématiques très riches. On peux les décrire de multiples manières. Nous allons ici parcourir différentes manières de les traiter.

Nous apprendrons à les identifier et à les dessiner. Nous aborderons les équations permettant de les déterminer.

C La gravitation universelle de Newton

La très grande masse du Soleil et la force d'attraction qu'il exerce sur tous les objets du système solaire sont déterminantes dans cette explication. La masse du Soleil est si importante qu'on peut (presque) confondre le centre du Soleil avec le centre de masse du système "planète-Soleil". On parle de "force centrale".

Kepler avait essayé de formuler des causes aux mouvements des planètes. Dans sa première loi, il affirme que les orbites des planètes sont des ellipses. Malheureusement, il s'en est tenu à une force en $1/R$ comme cause du mouvement. Avec un tel modèle, le Soleil aurait dû se trouver au centre de l'ellipse et pas en un des foyers de l'ellipse comme il le constate dans sa deuxième loi.

C'est la théorie de la gravitation universelle de Newton qui a fourni cette explication. En effet, avec une loi en $1/R^2$, la force centrale se trouve en un des foyers de l'ellipse.

Nous n'allons pas montrer ici le lien qui existe entre la force centrale due à l'attraction du Soleil et les coniques qui décrivent les trajectoires des objets dans le système solaire. Les développements mathématiques sont longs et, bien que permettant d'expliquer en détails les mouvements dans le système solaire, nous les assumerons comme vrais sans les démontrer.

D Activité

L'activité attenante que nous proposons est le tracé des 3 grandes familles de coniques avec une ficelle, deux punaises, une latte, une équerre, un anneau et un crayon !

2 Les coniques comme sections de cônes

Introduction

Les coniques sont des figures géométriques très importantes. Il existe plusieurs manières de les décrire.

Ici, dans un premier temps, nous allons traiter les ellipses comme sections de cônes.

A Cônes et sections de cônes

On peut considérer les coniques comme des sections de cônes.

a) Les cônes

Les cônes sont des solides de révolution.

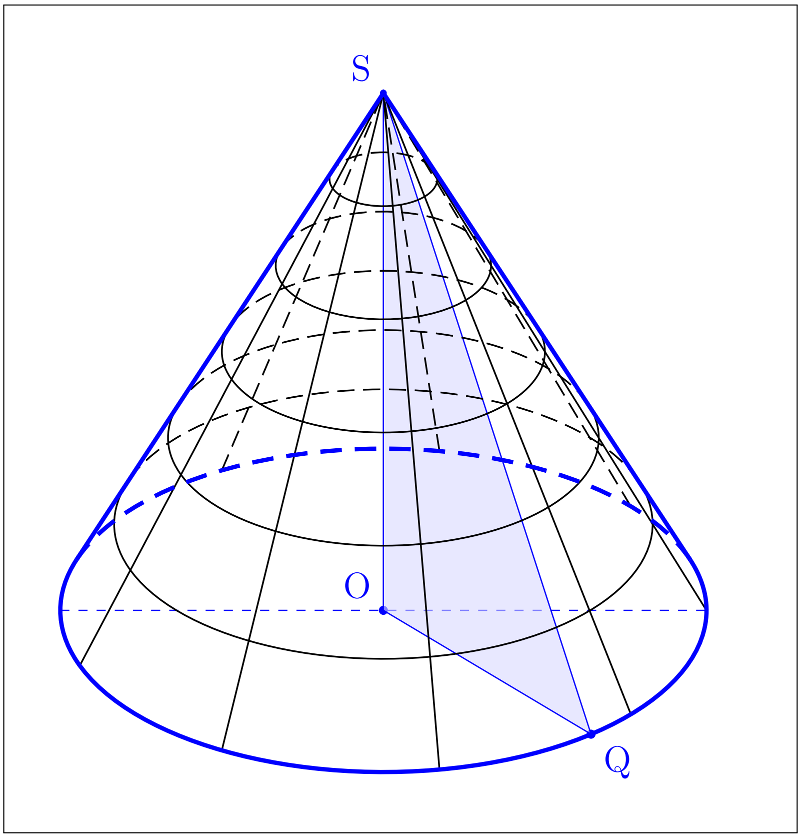

FIGURE 3 – Un cône généré par la rotation de la droite SQ autour de l'axe SO
Source H. Vermeiren

Prenez deux baguettes ou bâtons. Faites les se croiser à peu près en leur milieu. Puis faites tourner l'ensemble en prenant un des bâtons comme axe de rotation.

La rotation du deuxième bâton va délimiter un double cône dans l'espace.

Imaginez deux cornets de glace attachés par la pointe.

Ce type de volume est appelé un volume de révolution.

b) Sections de cônes

Si un plan coupe un cône, l'intersection du plan et du cône forme une conique.

On appelle "section de cône" ce lieu où le plan "coupe" le cône.

C'est la définition des Grecs anciens pour une conique :

Les coniques sont les sections d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par son sommet.

c) Fiat Lux

La lumière sortant d'une lampe de poche fournit une bonne approximation d'un cône.

La lumière projetée depuis la lampe sur le plan d'un mur va former une conique.

L'axe de la lampe correspondra à l'axe de révolution du cône.

d) Trois types d'angles possibles : trois types de coniques possibles

Représentons l'axe central (ou de révolution) de notre conique comme vertical.

Imaginons faire passer un plan par l'axe de révolution de notre conique.

Ce plan sera celui de notre feuille où nous dessinerons la conique.

Le bord du cône où passe le plan est une conique.

L'angle que fait le plan avec l'axe (SO dans le figure 3) du cône détermine le type de conique :

Si le plan forme avec l'axe un angle

1. droit (90^0), la conique est un cercle (c'est un cas particulier d'ellipse) ;
2. d'amplitude égale à celui de la génératrice (SQ dans le figure 3) , la conique est une parabole ;
3. d'amplitude comprise entre 90^0 et celui de la génératrice SQ , la conique est une ellipse ;
4. d'amplitude comprise entre celui de la génératrice SQ et 180^0 (parallèle à l'axe SO), la conique est une hyperbole.

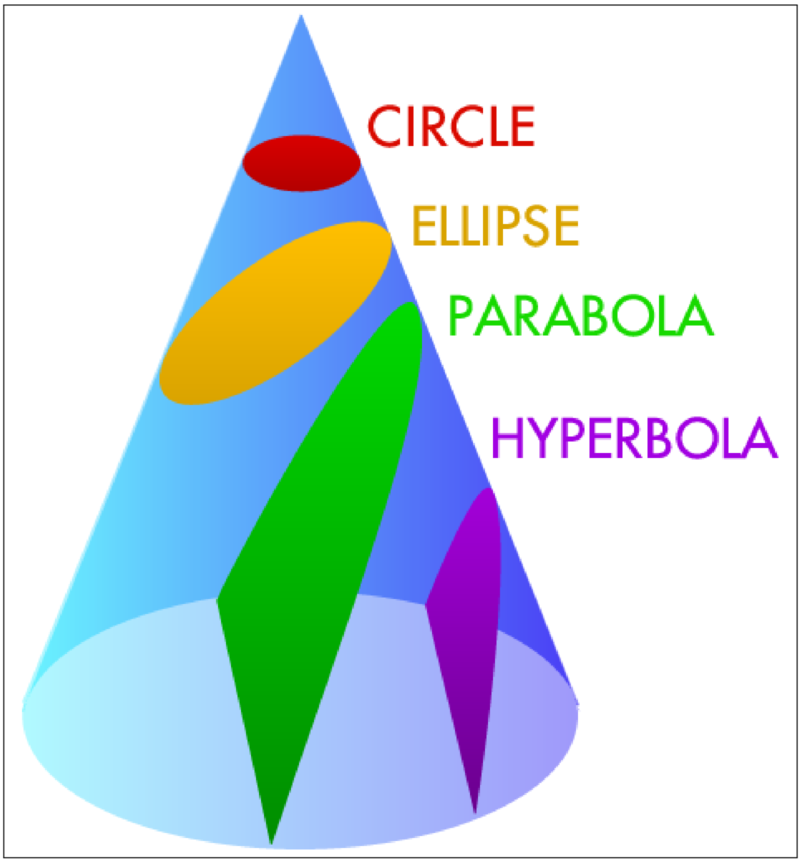

FIGURE 4 – Les trois types (et demi) de coniques.

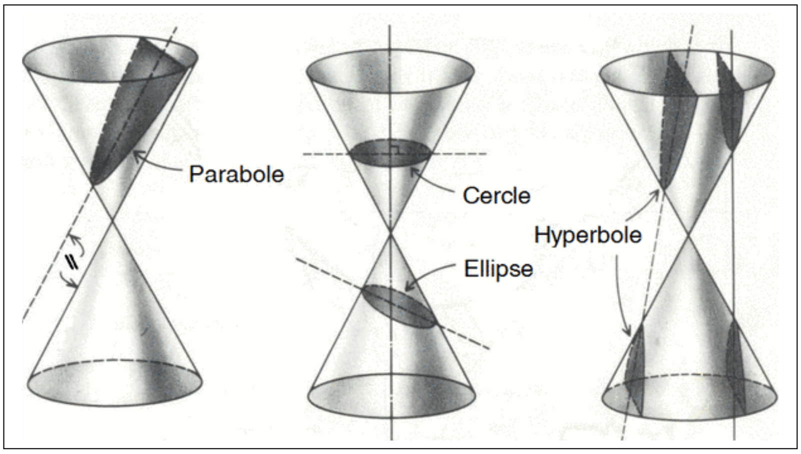

FIGURE 5 – L'angle entre le plan et l'axe de révolution détermine le type de conique.

B Ellipse

Si l'angle du plan est plus horizontal, on formera une ellipse (dont le cercle est un cas particulier).

a) Cas particulier : le cercle

Reprenons notre lampe de poche et projetons sa lumière sur un mur. Si l'axe de la lampe est bien perpendiculaire au mur, l'intersection du cône de lumière avec le mur forme un cercle.

b) Cas général : l'ellipse

Si l'axe de la lampe n'est plus bien perpendiculaire au mur mais que l'écart avec la perpendiculaire n'est pas encore trop grand, l'intersection du cône de lumière avec le mur forme une ellipse.

C Parabole

Si on penche la lampe jusqu'à ce que le bord extérieur du faisceau soit parallèle au mur, la zone éclairée du mur formera une parabole.

D Hyperbole

Si on continue à incliner la lampe (à la limite l'axe de la lampe est parallèle au mur), la zone éclairée formera une branche d'hyperbole. Une branche car il y en a toujours deux du point de vue de la géométrie.

3 Les coniques comme lieu de points

Introduction

Ces définitions des coniques comme "lieux de points" sont utiles pour comprendre les constructions "à la ficelle".

A Définitions comme lieux de points

Les coniques peuvent être vues comme des ”lieux de points” c’est à dire un ensemble de points obéissant à une même règle.

a) Différents lieux

Nous allons classer les lieux de points correspondants aux coniques en deux types :

1. par rapport au(x) foyer(s) et à une (deux) droite(s) directrice(s) (ceci est général mais plus compliqué),
2. par rapport aux foyers uniquement (ce qui pose problème pour la parabole).

Nous choisirons la définition nous convenant le mieux selon le cas.

Les distances des points de la conique par rapport aux foyers (et/ou à une droite appelée une directrice) sont dans des relations constantes.

b) Ellipse

Les points d’une ellipse sont tels que, pour tout point de l’ellipse, la somme des distances du point aux deux foyers est constante.

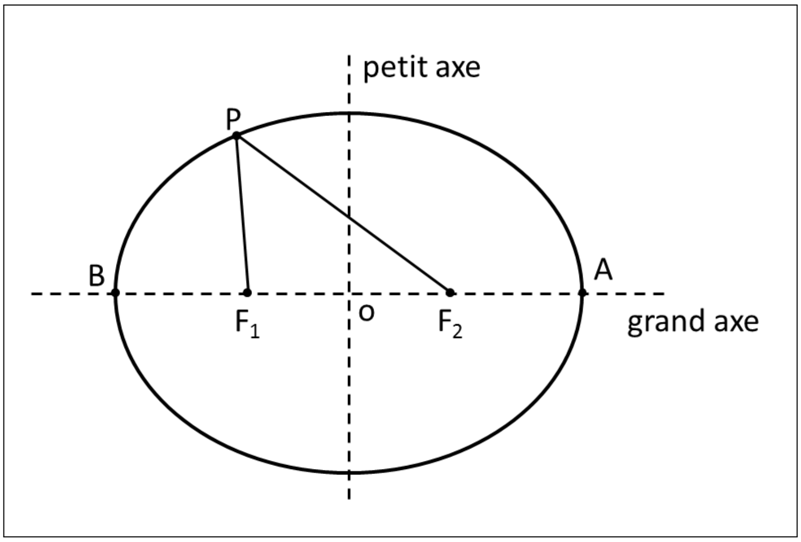

FIGURE 6 – La distance $PF_1 + PF_2$ est égale pour tous les points de l'ellipse.
(figure réalisée par Véronique Bastin)

Cas particulier : le cercle
Si les deux foyers sont confondus, on obtient un cercle.

c) Parabole

Les points d'une parabole sont tels que, pour tout point de la parabole, la distances du point au foyer est égale à la distance à une droite particulière : la droite directrice.

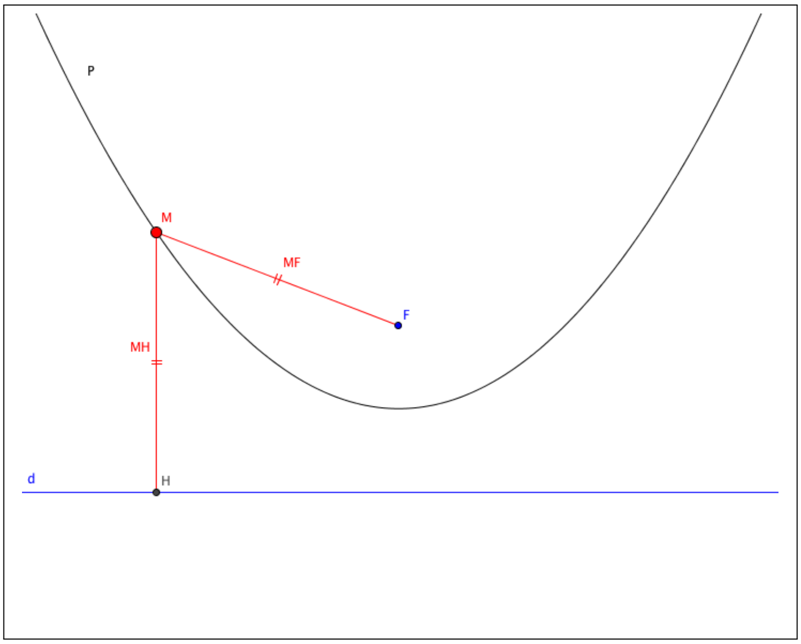

FIGURE 7 – Le point M de la parabole est à égales distances du foyer F et de la droite d.
Source : Wikimedia

d) Hyperbole

Les points d'une hyperbole sont tels que, pour tout point de l'hyperbole, la différence des distances du point aux deux foyers est constante.

B Constructions "à la ficelle"

Il existe quelques manières simples de dessiner les coniques avec un matériel élémentaire.

Nous avons choisi les méthodes les plus simples impliquant le matériel le plus simple possible.

Nous vous conseillons à chaque fois , pour faire le "dessin", d'installer une feuille de liège, type décoration-isolation, entre la table et votre feuille de papier pour protéger la table.

a) Ellipse du jardinier

L' "ellipse du jardinier" est souvent la seule méthode de construction d'une conique que la plupart connaisse.

La méthode utilise le fait que les points d'une ellipse sont tels que, pour tout point de l'ellipse, la somme des distances du point aux deux foyers est constante.

Matériel nécessaire

— une feuille de papier,
— un crayon,
— deux punaises
— et une ficelle.

Méthode

1. Plantez les deux punaises aux foyers de la future ellipse ;
2. prenez une longueur de ficelle supérieure à la distance entre les foyers (à tire indicatif : 1,5 à 2 fois cette distance) ;
3. faites deux petites boucles fixées chacune par un nœud aux extrémités de la longueur de ficelle ;
4. passez chacune de ces boucles sur une des punaises ;
5. tendez la ficelle avec un crayon ;
6. tout en maintenant la ficelle tendue, faites circuler le crayon ;
7. vous dessinez une ellipse.

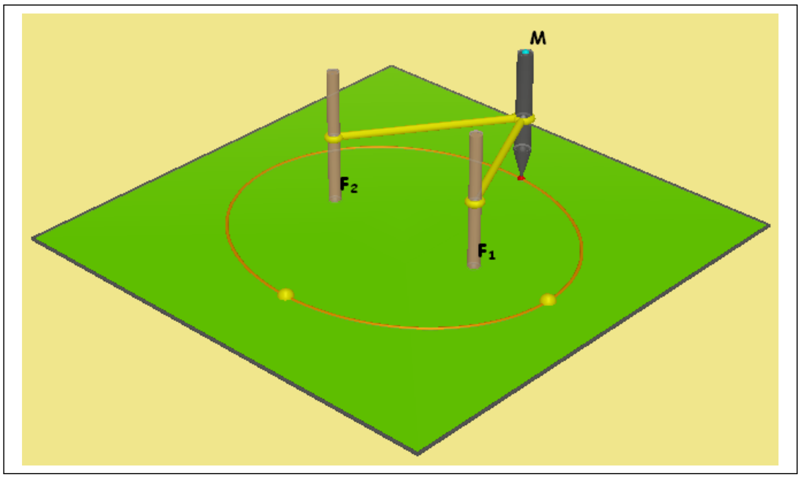

FIGURE 8 – La construction de l'ellipse du jardinier
Source : Hugues Vermeiren sur le site de l'U.R.E.M.-ULB

b) Hyperbole (du jardinier ?)

Ici, on utilise le fait que les points d'une hyperbole sont tels que, pour tout point de l'hyperbole, la *différence* des distances du point aux deux foyers est constante.

Matériel nécessaire

— une feuille de papier,
— un crayon,
— deux punaises,
— un anneau (type porte-clé ou alliance)
— et une ficelle.

Méthode

1. Plantez les deux punaises aux foyers de la future hyperbole ;
2. prenez une longueur de ficelle supérieure à la distance entre les foyers (à tire indicatif : 4 à 6 fois cette distance) ;
3. faites deux petites boucles fixées chacune par un nœud aux extrémités de la longueur de ficelle ;
4. passez chacune de ces boucles sur une des punaises ;
5. approximativement au deux tiers (2/3) de la ficelle (en tout cas PAS au milieu), faites un petit nœud ;

6. passez l'anneau au-dessus de ce petit nœud ;
7. placez le crayon dans l'anneau ;
8. tendez la ficelle en maintenant le petit nœud avec une main ;
9. tout en maintenant la ficelle tendue, faites circuler le crayon ;
10. vous dessinez une hyperbole.

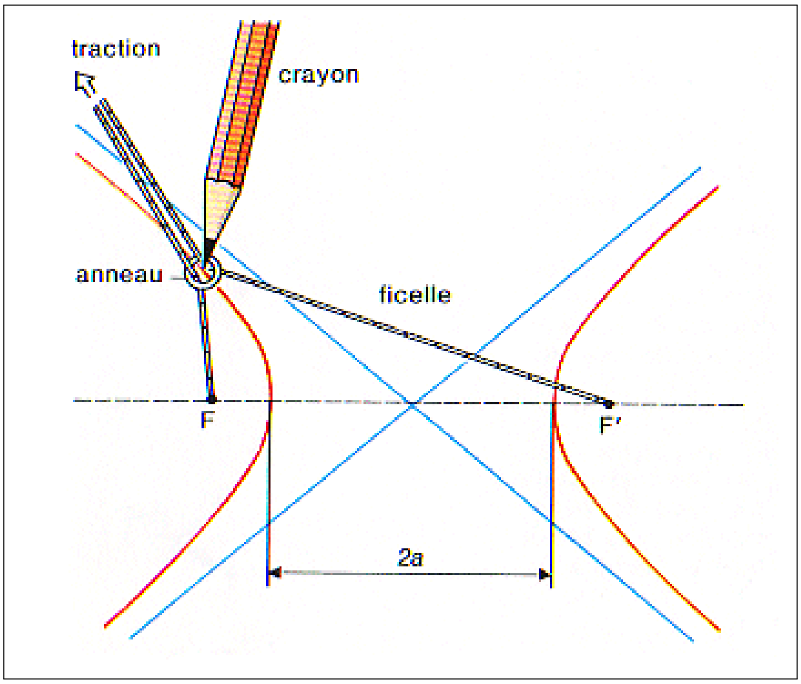

FIGURE 9 – L'hyperbole à la ficelle.
Source : Le site de "mathcurve"

c) Parabole de Kepler

Cette méthode est attribuée à Kepler.

Matériel nécessaire
Elle implique d'utiliser :
— une feuille de papier,
— un crayon,
— une épingle ou une punaise,
— une latte ou une règle,
— une équerre,

— une ficelle
— et, éventuellement, un peu de papier collant (pour fixer la ficelle à l'équerre).

Méthode

1. On positionne une règle ou une latte en bas de la feuille de papier. Le bord supérieur de la latte peut servir à tracer une droite AB.
2. Le côté EC le plus étroit de l'équerre viendra glisser le long de cette droite AB en s'appuyant sur la règle. (AB est la directrice de la parabole).
3. On plante, approximativement à deux ou trois centimètres de la règle, une épingle ou une punaise en un point F. (F est le foyer de la parabole.)
4. On prépare une longueur de ficelle égale à la longueur CD de l'équerre.
5. Les deux extrémités de la ficelle sont attachées, respectivement, à la pointe D de l'équerre et à la punaise F.
6. La pointe P du crayon reste le long du côté CD de l'équerre et maintient la ficelle tendue.
7. En faisant glisser le côté EC de l'équerre le long de la droite AB, le point C va parcourir (et le crayon va dessiner) une parabole !

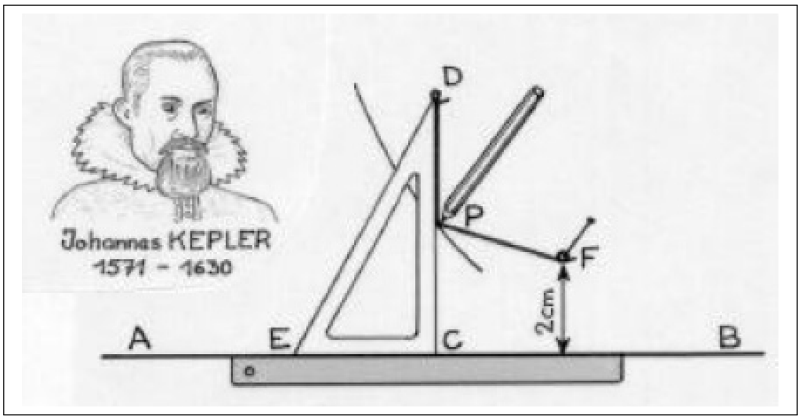

FIGURE 10 – Construction de la parabole à la ficelle

4 Les équations des coniques

Introduction

Nous allons ici étudier les équations des coniques et montrer qu'elles correspondent aux autres manières de les définir.

Nous verrons les équations cartésiennes (avec des"x" et des "y").

Un certains bagage mathématique est requis.

A Équations cartésiennes

Les équations cartésiennes sont des équations qui permettent de déterminer les coordonnées $(x; y)$ de points. Les points de la courbe que l'on désire étudier doivent obéir à l'équation.

a) Ellipse

Nous supposerons l'ellipse centrée sur l'origine O.
L'équation de l'ellipse correspondante est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

où :
- a est la longueur du demi-grand axe ;
- b est la longueur du demi-petit axe ;
- c est la demi-distance focale et vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;
- les foyers F et F' occupent des points de coordonnées $F : (c, 0)$ et $F' : (-c, 0)$;
- l'excentricité e vaut $e = c/a$ (et est toujours < 1) ;
- les droites D et D' sont les directrices d'équations : $D : x = a^2/C$ et $D' : x = -a^2/C$

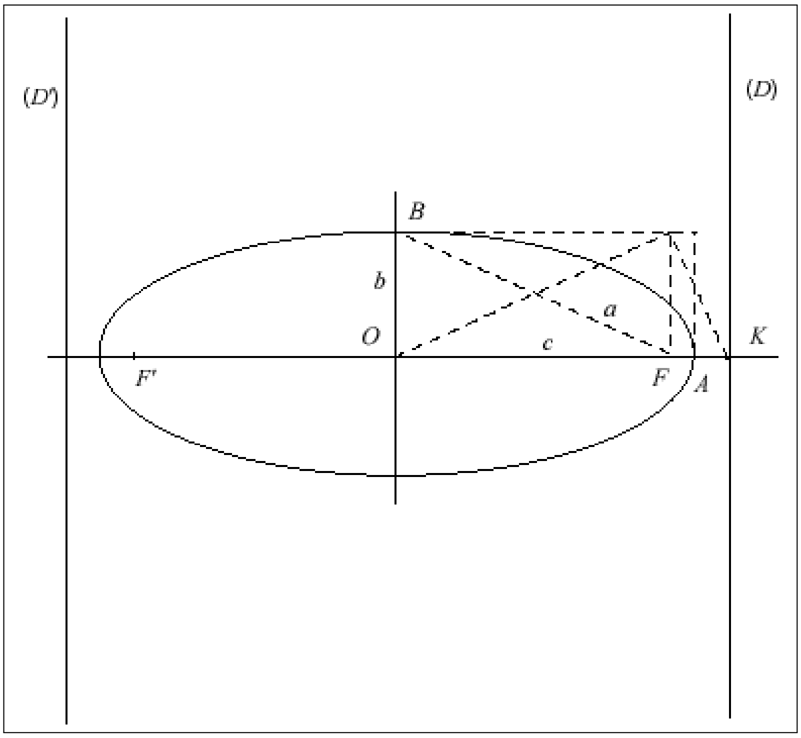

FIGURE 11 – Ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Source : Le site de "mathcurve"

Cas particulier : le cercle
Voici l'équation d'un cercle centré sur l'origine et de rayon R.

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2}$$

b) Parabole

$$y^2 = 2px \tag{3}$$

où :
— p est le paramètre de la parabole (> 0) ;
— le point F de coordonnées $(p/2, 0)$ est le foyer de la parabole ;
— la droite D d'équation $x = -p/2$ est la directrice de la parabole ;
— l'excentricité e d'une parabole vaut toujours 1.

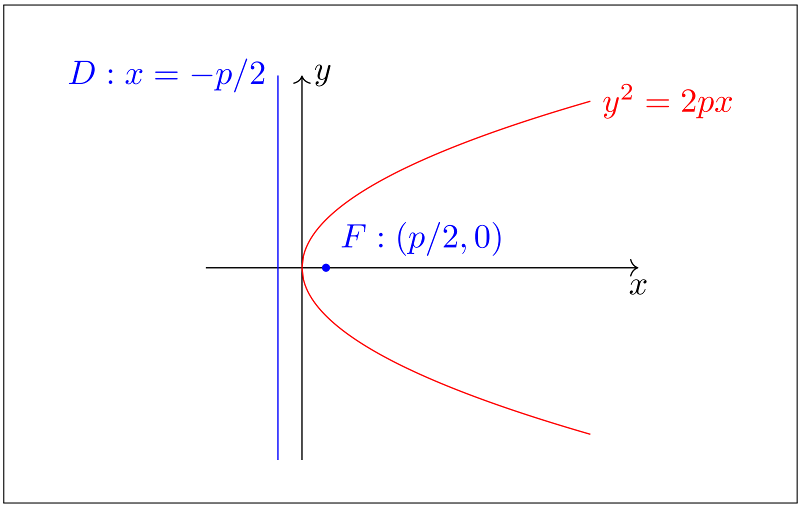

FIGURE 12 – Parabole d'équation $y^2 = 2px$

c) Hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

où :

— $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la demi-distance focale ;

— le rapport $e = c/a$ est l'excentricité de l'hyperbole ;

— Les foyers F et F' sont de coordonnées $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$;

— les droites D et D' sont les génératrices d'équations : $D : x = a^2/c$ et $D' : x = -a^2/c$.

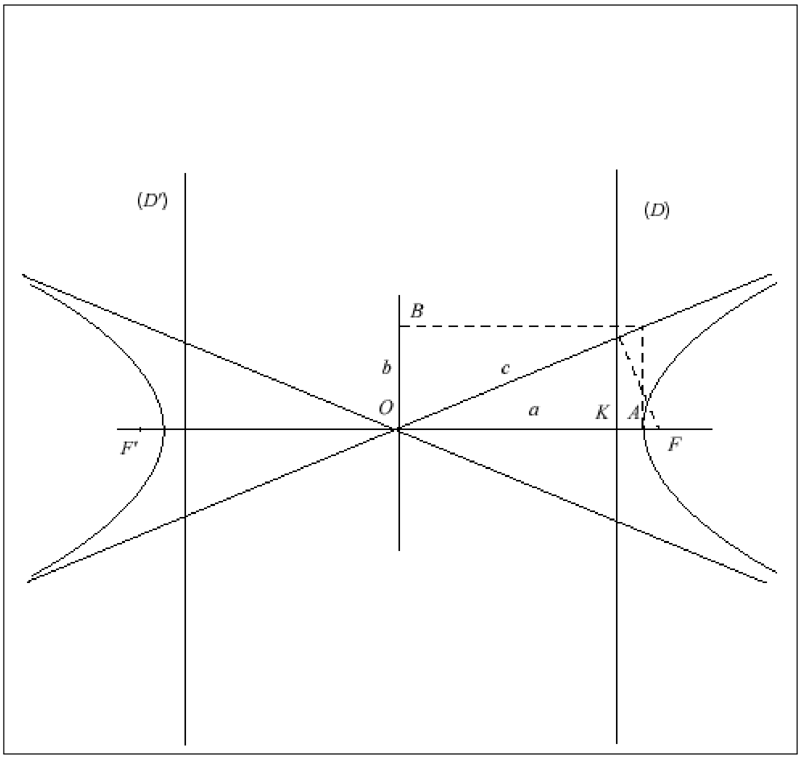

FIGURE 13 – Hyperbole d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Source : Le site de "mathcurve"

Pour terminer

Ce qui a été exposé ici frustrera sûrement un mathématicien. Il y a tellement plus à dire sur le sujet des coniques !

Il y a aussi d'autres techniques de construction des coniques.

Pourtant les techniques à mettre en œuvre ici sont efficaces et simples : pas de compas, pas de mesures ...

Elles peuvent être apprises à de jeunes enfants et servir de point de départ d'explications plus poussées pour des plus grands.

Table des matières