La démarche de Newton et la gravitation universelle

Yves A. Delhaye

16 avril 2015 11 :58

Résumé

Ce document est une copie des notes de cours destinées à mes élèves.

Si la démarche suivie ici a été appliquée (et testée) dans des écoles, elle est tout fait transposable dans des contextes de stages ou d'animations.

La démarche de Newton pour découvrir la loi de la gravitation universelle est esquissée. Le lien entre la chute libre due à l'accélération de gravité sur la Terre et le mouvement orbital de la Lune est établi.

La loi de la gravitation universelle est alors formulée.

La loi de gravitation universelle est finalement utilisée pour "peser" la Terre puis le Soleil.

Dans un document destiné aux formateurs (futurs animateurs), j'explique l'utilisation et l'installation du logiciel "planets" qui permet d'illustrer la démarche de Newton et de "faire des expériences" (certes virtuelles mais réalisables en classe !) avec la gravité et la mécanique céleste.

Introduction

Ici, nous développons la formulation de la loi de gravitation universelle.

Après avoir nous être ”mis dans les bottes de Newton” et avoir suivi le cheminement de son raisonnement pour découvrir la loi, nous allons énoncer sa loi et en voir quelques conséquences.

Nous allons ainsi ”peser” la Terre, le Soleil ...

1 Découverte de la loi de Newton (17ème siècle)

A Question

La question que Newton se pose est la suivante : ”Comment se fait-il que la Terre entraîne la Lune avec elle dans son mouvement annuel autour du Soleil ?”

B Observations

Newton raisonne ensuite sur des observations (la fameuse pomme) :

”Les corps lâchés à proximité de la surface de la Terre tombent. En l'absence de frottements, le mouvement est un MRUA dont la trajectoire est verticale et caractérisé par une accélération ”g” identique pour tous les objets.”

La valeur de g varie avec l'altitude et la latitude.

Newton considère que la Terre exerce une force d'attraction (pesanteur) sur les objets situés à proximité de sa surface ; cette force est dirigée vers le centre de la Terre et vaut $P = m \cdot g$. Son intensité est proportionnelle à la masse des objets attirés.

C Hypothèse : Fin de la dualité Terre-Ciel

La Terre attire la Lune comme elle attire tous les corps matériels situés à sa surface. Les corps terrestres et les corps célestes obéissent aux mêmes lois.

La Lune est sans doute un corps matériel de même type que les corps terrestres.

Pour tester cette hypothèse, basons-nous sur deux exemples :

a) Trajectoire d'un objet lancé obliquement à la surface de la Terre.

Lorsqu'on lance obliquement un projectile à la surface de la Terre (Fig. 1 p. 3), on observe la trajectoire 1. En l'absence de pesanteur, le mouvement serait de type **MRU** comme sur la trajectoire 2.

Si on admet que la Lune se meut dans le vide, et si la Lune n'était pas attirée par la Terre, elle devrait être animée d'un MRU et s'éloignerait continuellement de la Terre, ce qui n'est pas le cas. La pesanteur doit donc entraver son MRU.

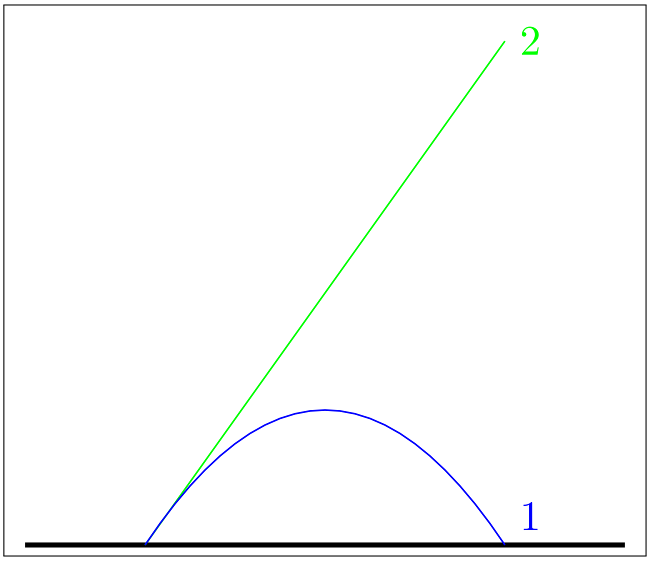

FIGURE 1 – Trajectoires avec et sans gravité lors d'un lancer depuis le sol.

b) Trajectoire d'un corps lancé horizontalement à partir d'une grande hauteur au-dessus de la surface de la Terre avec des vitesses différentes

Newton fait ensuite "l'expérience de pensée" suivante : Il imagine de lancer des objets depuis une très haute montagne en leur donnant une vitesse horizontale d'abord nulle puis de plus en plus grande.

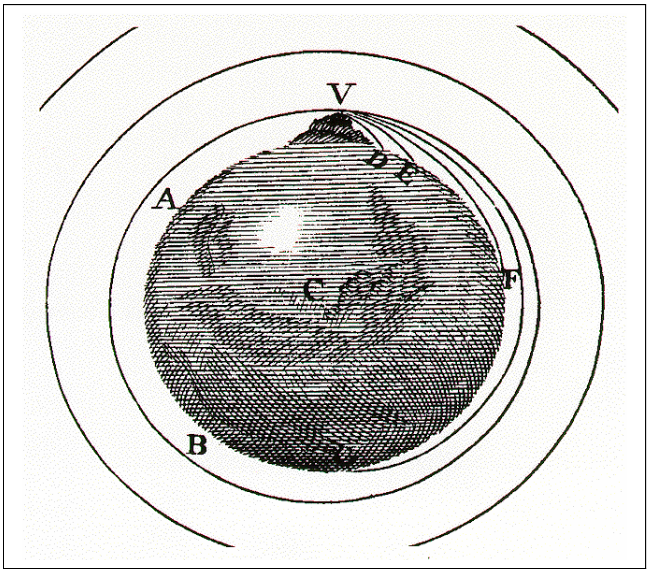

FIGURE 2 – Trajectoires d'un objet lancé d'une grande hauteur selon Newton.

Soit un corps lancé à une distance très grande de la surface de la Terre, $\perp$ à la verticale avec des vitesses $\pm$ grandes (Fig. 2 p. 4).

Si la vitesse initiale était nulle ou trop petite, le corps tomberait suivant la verticale. C'est ce qu'on appelle une "chute libre".

Plus la vitesse initiale est grande (D et E sur la figure 2), plus la trajectoire du corps sera allongée. On est alors dans le cas du "tir horizontal".

Si la vitesse initiale grandit encore, l'objet commence à tomber "sur le côté" de la Terre (F sur la figure 2) .

Pour des vitesse initiales très grandes, la trajectoire du corps devient presque circulaire (en fait elliptique).

Or la lune ne tombe jamais sur la Terre, elle la suit dans son déplacement.

c) Conclusions

La trajectoire de la Lune est une trajectoire elliptique dont l'équilibre dépend de 2 causes :

- la tendance naturelle à perpétuer un mouvement initial : si cette seule cause était déterminante, la Lune s'éloignerait continuellement de la Terre.
- la tendance à se rapprocher de la surface de la Terre sous l'effet de la pesanteur : la Lune aurait tendance à s'écraser

sur la Terre si seule la force de gravité était en jeu.

D Conséquences

a) La Terre attire la Lune

Considérant que la Lune reste "attachée" à la Terre en décrivant autour d'elle une trajectoire quasi circulaire, Newton conclut qu'une force attractive devrait lui être appliquée pas trop grande pour ne pas l'entraîner de son orbite vers la Terre ni trop petite car elle ne ferait pas dévier suffisamment la Lune d'un trajet en ligne droite.

La Terre exerce sur la Lune une force F_{T-L} d'attraction gravifique, analogue à la force de pesanteur que subit un corps quelconque près de la surface de la Terre, et qui est orientée vers le centre de la Terre. Sa grandeur est proportionnelle à la masse m_L de la Lune et est inversement proportionnelle au carré de la distance r_{T-L} qui sépare la Lune du centre de la Terre. La grandeur de cette force est donc donnée par la relation

$$F_{T-L} = k\frac{m_L}{r_{T-L}^2} \text{ où } k = \text{ une constante}$$

b) Le Soleil attire les planètes

Puisque le mouvement des planètes autour du Soleil est analogue au mouvement de la Lune autour de la Terre, nous admettons que le Soleil exerce sur chacune des planètes une force F_{S-P} d'attraction gravifique qui est orientée vers le Soleil. Sa grandeur est proportionnelle à la masse M_P de la planète considérée et inversément proportionnelle au carré de la distance R_{S-P} qui la sépare du Soleil :

$$F_{S-P} = K\frac{M_P}{R_{S-P}^2} \text{ où } K = \text{ une autre constante}$$

c) Lien avec les lois de Kepler : pourquoi une loi en $1/d^2$

Comme la force de gravité décroît avec la distance séparant les deux objets étudiés, l'expression donnant la grandeur de cette force doit être inversement proportionnelle à cette distance. Kepler avait imaginé une force en "$1/d$".

Mais Newton connaît la première loi de Kepler.

Rappelons la première loi de Kepler :

Chaque planète se déplace sur une orbite elliptique dont le Soleil occupe un des foyers (Fig. 3 p. 6)

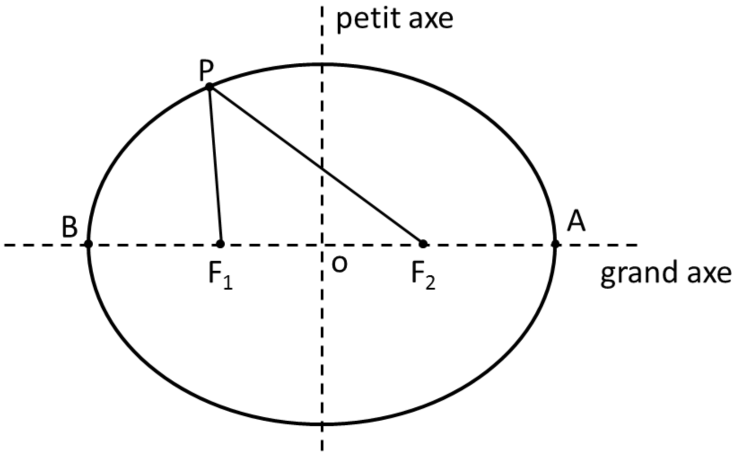

FIGURE 3 – Une orbite elliptique : le soleil occupe un des foyers (F_1 ou F_2) et pas le centre O.

Soit d la distance séparant deux corps dont l'un est beaucoup lus massif que l'autre, si la loi d'attraction était en $1/d$, l'objet le plus massif devrait se trouver au centre de l'ellipse. Si, par contre, la force est en $1/d^2$, l'objet le plus massif est à un des foyers. Comme le Soleil est à un des foyers, Newton a déterminé que la loi d'attraction devait être en $1/d^2$!

2 Loi de la gravitation universelle

A Formulation

Deux corps matériels ponctuels de masse m et m' s'attirent mutuellement avec une force dont l'intensité est proportionnelle à chacune de ces masses et inversément proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare.

Cette force vaut :

$F = G\dfrac{m \cdot m'}{r^2}$ où G est une C$^{\text{ste}}$ universelle valant $6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 (1)

avec F en N, m et m' en kg et r en m^2.

B Conséquences

— Tous les corps matériels exercent les uns sur les autres une force gravifique.
— La loi de l'attraction universelle est une loi d'attraction à distance qui s'exerce même à travers le vide.
— Cette loi est valable où que se trouve les corps considérés dans l'Univers.
— La force d'attraction gravitationnelle n'a pas de limite mais elle décroît rapidement lorsque la distance entre les corps augmente (loi en $1/d^2$).
— La gravité n'est observable que si un des corps est très massif.

C Applications

a) La vitesse orbitale des satellites

Les satellites tournent autour de la Terre conformément aux lois de Kepler. Si l'on pense au fait que la Lune a une période de révolution de 27,3 jours, on peut s'étonner que Spoutnik I, 1er satellite artificiel mis en orbite en 1957 par les Soviétiques, avait une période de révolution de 96 minutes.

Cela provient du fait que ce satellite artificiel était beaucoup plus près de la Terre que notre satellite naturel. Le "pouvoir attractif" de la Terre y est donc beaucoup plus grand et pour que Spoutnik puisse rester en orbite, il fallait qu'il se déplace à une vitesse très grande. Il suivait une trajectoire elliptique très allongée, descendant jusqu'à environ 230 km et montant jusqu'à environ 900 km au-dessus de la surface de la Terre.

b) Les satellites géostationnaires et géosynchrones

Un satellite géostationnaire tourne autour de la Terre en gardant une position (pratiquement) constante par rapport à celle-ci. Il est donc particulièrement adapté pour relayer les télécommunications et les émissions de télévision sans variations de puissance.

Le premier satellite géostationnaire commercial était "Early Bird" (USA, 1965). Son altitude était de 35600 km.

Pour rendre un satellite géostationnaire, on doit le placer sur une orbite équatoriale circulaire, à une altitude assez grande pour que sa période de révolution T soit égale à un jour sidéral. Il tourne alors à la même vitesse angulaire que la Terre et reste donc au-dessus d'un lieu donné sur la surface de la Terre .

Les lancements principaux ont été effectués par la NASA (USA) de Cap Canaveral (Floride) et par l'Agence spatiale Européenne de Kourou (Guyane française).

Un satellite géosynchrone a également une période de rotation égale à un jour sidéral, mais son orbite est inclinée par rapport à l'Équateur et elle est généralement elliptique . Il se présente donc chaque jour à la même heure au-dessus du même endroit, mais n'y reste pas continuellement.

3 Applications

Un des "drames" de la vie de Newton fut que sa constante de gravitation universelle "G" ne fut déterminée qu'après sa mort par Cavendish. Certes il estima assez bien la valeur de "G" mais la technologie qui permit de mesurer cette valeur n'était pas assez précise de son vivant.

A La masse de la Terre

Le calcul qui suit a, en son temps, fait la "une" du "Times" de Londres : "On a pesé la Terre".

Ce calcul repose sur un raisonnement très simple : Le poids d' un objet à la surface de la Terre est causé par l' interaction de gravité entre cet objet et la Terre. La force "poids" de ce corps et la force de gravité entre le corps et la Terre sont égales.

- Données :
  - La masse de l'objet m
  - la distance entre l'objet et le centre de la Terre est déterminé via la circonférence : $Circ \simeq 40\ 000\ (km) = 4.10^7 (m)$
  - $g = 9{,}81 m/s^2$
- Inconnues : La masse de la Terre = M_T
- Formules :
  - $P = m \cdot g$ et $P = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{d^2}$
  - $R = \frac{Circ}{2\pi}$
- Solution :

— $d = R = \frac{Circ}{2\pi} = \frac{4.10^7}{2\pi} \simeq 6,366 \cdot 10^6\, m$
— $m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{d^2}$
— $g = G \cdot \frac{M_T}{d^2}$
— $M_T = g \cdot \frac{d^2}{G}$
— $M_T = 9,81 \cdot \frac{(6{,}366 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \simeq 6 \cdot 10^{24} kg$

B La masse du Soleil

La force centripète F_C qui maintient la Terre sur son orbite autour du Soleil est la force de gravité F_G. Il faut donc égaler ces deux forces comme on l'avait fait pour calculer la masse de la Terre.

— Données :
  — La masse de la Terre m_T
  — La masse du Soleil M_S
  — la distance entre le Soleil et la Terre est approximativement : $R \simeq 150\ 000\ 000\ (km) = 1,5.10^{11} (m)$
  — La période de révolution de la Terre autour du Soleil = 1 an $= 365 \cdot 24 \cdot 3600 s = 3,1536 \cdot 10^7 s$
— Inconnues : M_S
— Formules :
  — $F_G = G \cdot \frac{m_T \cdot M_S}{R^2}$
  — $F_c = m_T \omega^2 R$
  — $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (la vitesse angulaire)
— Solution :
  — $F_c = m_T R 4\pi^2 \frac{1}{T^2}$
  — $F_c = F_G$
  — $m_T R 4\pi^2 \frac{1}{T^2} = G \cdot \frac{m_T \cdot M_S}{R^2}$
  — $R 4\pi^2 \frac{1}{T^2} = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$
  — $M_S = 4\pi^2 \frac{1}{G} \frac{R^3}{T^2}$
  Remarquons ici que la masse du Soleil est inversement proportionnelle à la constante de Kepler ($\frac{T^2}{R^3}$) ! (voir le point a) p. 10)
  — $M_S = 4\pi^2 \frac{1}{G} \frac{1}{K_{\text{Kepler}}}$
  — $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-11}} \frac{(1{,}5.10^{11})^3}{(3{,}1536 \cdot 10^7)^2}$
  — $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-11}} \frac{(1{,}5)^3.10^{33}}{(3{,}1536)^2 \cdot 10^{14}}$
  — $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-11}} \frac{(1{,}5)^3.10^{33}}{(3{,}1536)^2 \cdot 10^{14}}$
  — $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot (3{,}1536)^2} \cdot (1,5)^3 \cdot 10^{+11} \cdot 10^{33} \cdot 10^{-14}$
  — $M_S = 4 \cdot 9,87 \frac{1}{6.67 \cdot (3{,}1536)^2} \cdot (1,5)^3 \cdot 10^{+11} \cdot 10^{33} \cdot 10^{-14}$

— $M_S \simeq 3 \cdot 10^{30} kg$

a) La constante de Kepler

C'est la masse de l'objet "dominant" qui détermine la constante de Kepler dans sa troisième loi. Des relations en "T^2/R^3" existent dès qu'un objet est en orbite autour d'un autre. Ainsi, il est possible de déterminer la masse de Jupiter en connaissant la période et le rayon de révolution d'une de ses lunes. Une "troisième" loi de Kepler sera d'application mais avec une constante qui sera liée à la masse de Jupiter !

C Autres calculs possibles

La même démarche que celle utilisée pour le Soleil peut être utilisée pour déterminer les masses des planètes possédant une lune, des étoiles doubles ou du trou noir au centre de notre galaxie.

4 Conclusion

L'établissement de la loi de gravitation universelle par Newton fut un tel succès que d'autres lois s'en inspirèrent directement (la loi de Coulomb). La science moderne a été littéralement "poussée dans le dos" par ce succès. Il s'agit d'un acte fondateur qui a établi la confiance que nous avons encore dans la puissance du raisonnement scientifique, ses possibilités de prévision et les réalisations qui peuvent en découler.

Encore aujourd'hui les mouvements dans le système solaire s'expliquent grâce à cette loi et aux principes établis par Newton.

Table des matières

1 Découverte de la loi de Newton (17ème siècle) 2
- A Question . . . 2
- B Observations . . . 2
- C Hypothèse : Fin de la dualité Terre-Ciel . . . 2
  - a) Trajectoire d'un objet lancé obliquement à la surface de la Terre. . . . 3
  - b) Trajectoire d'un corps lancé horizontalement à partir d'une grande hauteur au-dessus de la surface de la Terre avec des vitesses différentes 3
  - c) Conclusions . . . 4
- D Conséquences . . . 5
  - a) La Terre attire la Lune . . . 5
  - b) Le Soleil attire les planètes . . . 5
  - c) Lien avec les lois de Kepler : pourquoi une loi en $1/d^2$ . . . 5

2 Loi de la gravitation universelle 6
- A Formulation . . . 6
- B Conséquences . . . 7
- C Applications . . . 7
  - a) La vitesse orbitale des satellites . . . 7
  - b) Les satellites géostationnaires et géosynchrones 7

3 Applications 8
- A La masse de la Terre . . . 8
- B La masse du Soleil . . . 9
  - a) La constante de Kepler . . . 10
- C Autres calculs possibles . . . 10

4 Conclusion 11